

LIBRIS

We know
books

Clasic și modern În matematica învățământului primar

COSTEL CHITEȘ

CUPRINS

Introducere	5
Capitolul 1	
Repere didactice	11
Capitolul 2	
Clasa pregătitoare (de la grădiniță la ciclul primar)	14
Capitolul 3	
Clasa 1	36
Capitolul 4	
Clasa a 2-a	49
Capitolul 5	
Clasa a 3-a	59
Capitolul 6	
Clasa a 4-a	91
Capitolul 7	
Științele naturii. Clasele a 3-a și a 4-a	132
Capitolul 8	
Exerciții realizate sub forma unui dialog socratic	172
Capitolul 9	
Știați că	182
Capitolul 10	
Povestiri anecdotice despre oameni de știință	186
Capitolul 11	
Teste pentru admiterea în clasa a 5-a	190
Capitolul 12	
Teme suplimentare pentru pregătirea examenelor didactice	201
Sugestii bibliografice.....	325

CAPITOLUL 1

REPERE DIDACTICE

Motto

„Arta scribilor este mama învățării”.
(spuneau sumerienii)

Didactica matematicii reprezintă știința care studiază condițiile specifice ale difuzării cunoștințelor matematice utile în funcționarea instituțiilor umane.

Sistemul minimal al studiului didactic este triunghiul didactic: a) elev; b) cunoaștere; c) profesor.

Se studiază interacțiunile dintre profesori și elevi relative la cunoaștere într-o situație cu finalitate didactică.

Provocarea de a învăța, conduce, de la un stadiu inițial, la un stadiu final al cunoașterii. Finalitatea sistemului didactic constă în estomparea (sau dispariția relativă) dintre cunoașterea mentorului și a discipolului său. Transferul se va realiza prin diminuarea treptată a intervenției mentorului în relația elev - cunoaștere. Învățarea nu este un simplu transfer, ea nefiind nici liniară, nici continuă. În timpul transferului, elevul se adaptează unui mediu care produce contradicții, dificultăți, dezechilibre. După învățare, elevul își recapătă echilibrul. Rolul mentorului este de a alege în mod judicios situațiile prin care să provoace elevilor adaptările dorite.

Există situații ideale în care elevul învață, în raport cu propriile dorințe, cu propriile provocări, deci nu din rațiuni didactice. Noile cunoștințe dobândite singur, prin învățare, sunt justificate prin logica internă, prin formularea unor strategii de acțiune, prin validarea cunoașterii în raport cu cele dobândite în trecut. Trebuie avute în vedere următoarele aspecte: a) elevul să considere un răspuns la problema solicitată, dar acesta să nu fie cel așteptat de către profesor, fiind insuficient într-o situație de învățare; b) procedurile de bază se evidențiază foarte repede fiind insuficiente sau eficace pentru ca elevul să se acomodeze cu noul sistem de cunoștințe; c) cunoștințele vizează trecerea de la cele de bază printr-o strategie optimală; d) există posibilități de validare, mijloace retroactive.

Din punct de vedere epistemologic se consideră că pentru cunoașterea matematicii există o familie de situații susceptibile cărora li s-a dat un sens corect.

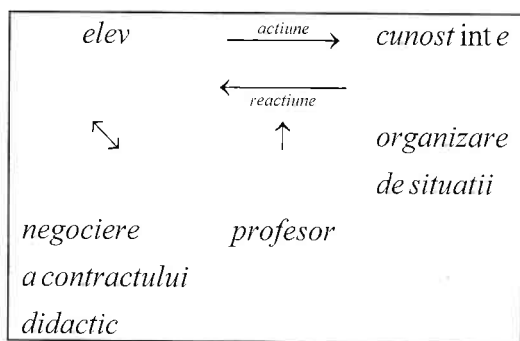
Multitudinea surselor bibliografice, selecția informațiilor, a conexiunilor acestora, prezentarea în mod ascendent în raport cu dificultățile întâlnite, pot fi repere ale unui cadru didactic competent.

Experiența didactică constă în interogarea asupra sensului comportamentelor și ale răspunsurilor elevilor relative la problematizarea situațiilor apărute cât și aplicarea cunoștințelor matematice de către ei. Se vor alege apoi acele căi prin care anumite calcule/raționamente matematice greșite se vor evita. Pe parcursul actului didactic, regulile de comunicare între elevi și profesor, în raport cu obiectele matematice de învățat, se schimbă prin întreruperi și reluări, pe măsura achizițiilor și evoluția acestora. Aceste reguli sunt deci local stabile dar nu sunt imuabile. Este necesară o negociere implicită între profesor și elevi, deoarece elevul trebuie condus spre poziția în care își dorește propria schimbare în cunoaștere.

Pentru a ajuta elevii este necesar: a) să cunoaștem cadrul în care ei lucrează; b) să-i îndrumăm, ca înainte de a învăța, să cunoască direcția activității, a muncii în care îndrăznesc să se lanseze.

Profesorii trebuie să poată interpreta răspunsurile elevilor, să recunoască semnificația învățării.

Un model modern al situației didactice este cel în care este grefat și studiul personal, generat de propriile necesități intelectuale.



Oricare nouă cunoaștere a unui obiect provoacă rupturi (discontinuități) în raport cu obiectele cunoscute înainte și conduce la o renegociere a noului contract cu profesorul. Evoluția spirituală a elevului trebuie astfel cunoscută, recunoscută și susținută de către mentor.

De exemplu:

- în învățământul primar, numărul 3707 se împarte exact la 11, prin efectuarea împărțirii ($3707 = 11 \times 337$), iar în gimnaziu, elevul aplică criteriul de divizibilitate cu 11, ($7 + 7 - 0 - 3 = 11$, $11:11$, deci $3707:11$).

- în învățământul primar, două segmente AB și CD sunt egale dacă prin utilizarea unei rigle gradate se obține prin măsurare aceleași valoare numerică. În gimnaziu, prin utilizarea raționamentului geometric deductiv, se încadrează cele două segmente în figuri geometrice, care apoi se demonstrează că sunt congruente.

Este acceptată ideea prin care se consideră strategiile didactice ca fiind deschise optimizării proceselor de învățare, ținând cont de modificările și abordările în știință, tehnologie, în care elevul nostru de azi se va raporta mâine. Deschiderea participării active, a cognitivului cu emoționalul, îl putem realiza prin intermediul unor exemple din știință, prin cunoașterea modului în care s-au format și dezvoltat ideile de-a lungul timpului.

S-au evidențiat strategii prin care se observă procesele de rezolvare ale problemelor propuse. Acestea au fost grupate pe tehnici de rezolvare, pe tipuri de raționament specific matematicii, prin care se evidențiază unitatea dintre informativ și formativ.

Participarea activă, bucuria propriilor descoperiri, îi conferă discipolului noi căutări, noi probleme la care se va raporta. Vă invităm să creați probleme asemănătoare sau să le oferiți elevilor dumneavoastră posibilitatea de a pune noi probleme. Mentorii vor propune noi probleme până când vor observa că majoritatea elevilor au achiziționat noile noțiuni și strategii de rezolvare. Vom deschide și calea afirmării elevilor prin noi enunțuri, ținând cont de dezvoltarea/evoluția psihismului în intervalul 6-11 ani. Trebuie insuflată dorința de autodepășire, a atingerii unor ținte superioare celor realizate de predecesori.

Nu trebuie uitată pregătirea continuă în specialitate, pentru a putea răspunde corect și prompt la solicitările ce apar.

Culegerile de probleme, testele propuse cu diverse ocazii, revistele destinate elevilor, reprezintă un material atât de bogat, încât este necesar să apelăm la surse universitare viabile, la cărți destinate înțelegerii strategiilor de rezolvare ale problemelor. O bună pregătire în specialitate reprezintă un cadru suport în care se pot desfășura activități cu caracter didactic de calitate.

CAPITOLUL 2

CLASA PREGĂTITOARE

(de la grădiniță la ciclul primar)

Motto:

„Cartea Universului nu poate fi înțeleasă decât prin cunoașterea și descrierea limbajului în care ea este scrisă. Ea este scrisă în limbajul matematicii.”

(Galileo Galilei, matematician și pionier al științei) ¹⁰

Exercițiul 0.1



- Denumiți fiecare dintre figurile geometrice reprezentate mai sus.
- Câte vârfuri identificați în primele patru figuri geometrice?
- Câte laturi identificați în primele patru figuri geometrice?

Soluție

- Pătrat; dreptunghi; triunghi; romb; cerc.
- b), c) Dreptunghiul.

Remarcă

- Elementele de geometrie reprezintă o modalitate abstractă prin care se descrie lumea în care trăim. Figurile geometrice reprezentate sunt des utilizate, motiv pentru care putem cere elevilor să identifice obiecte din natură care conțin secțiuni ale figurilor reprezentate.
- Putem interveni pentru a recupera, acolo unde este nevoie, pe cei care greșesc.

¹⁰ Joel Levy, *Mathematics a curious history from early number concepts to chaos theory*, Carlton Publishing Group 20 Mortimer Street, London W1 T 3JW, 2018; p. 7.

Exercițiul 0.2

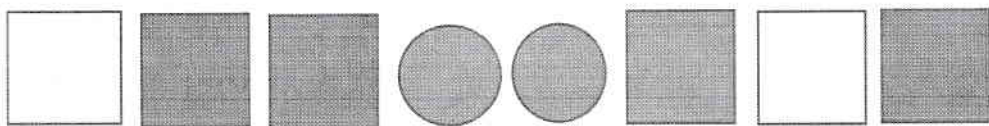
Să se copieze acest model:

Remarcă

- Copierea unui model reprezintă o activitate atrăgătoare pentru școlarii mici. Putem realiza multe alte modele prin utilizarea altor figuri și a altor culori. Se pot considera planșe sau desene realizate de noi sau altele editate la imprimantă, ce sunt foarte atractive și apoi, se vor selecta din acestea, doar figuri geometrice pe care copiii pot să le realizeze. Se pot evidenția fețe laterale, baze ale unor piramide, etc.
- Activitatea de copiere induce identitatea a două secvențe desenate. Privindu-se în oglindă copiii își văd propriul chip. Relațiile de congruență ale figurilor, relația de egalitate, sunt astfel utilizate încă de la vârste fragede prin acest tip de activitate.
- Putem identifica culorile utilizate cu cele care se află pe drapelul național.

Exercițiul 0.3

Identificați părțile care se repetă și apoi continuați desenul din figura următoare cu încă 6 figuri geometrice.

**Soluție****Remarcă**

- Problemele de tip repetitiv, realizate la vârste fragede, vor dezvolta logica prin care sunt realizate. Se evidențiază un model de tip cod, care

va ajuta studiul acestora la informatică (criptare și decriptare). Raționamentul se va repeta în anii de școală sub diferite forme (secvențe de numere, desene, etc). În anii de școlaritate următori (gimnaziu, liceu, facultate) se utilizează periodicitatea la funcții, la oscilații, etc. Noi dorim să dezvăluim motivul introducerii în programe a unor astfel de exerciții, pentru a susține un start bun, în formarea matematică a copiilor. Aceste motivații ne dau încredere în activitatea pe care o desfășurăm an de an. Pregătirea continuă, căutarea unor noi activități pe care le vom desfășura, asigură o bună adaptare la cerințele crescânde ale Științei și Tehnologiei. Trebuie avut continuu în vedere aspectul formării caracterului uman. Se asigură astfel o mai bună legătură dintre ciclurile de învățământ.¹¹ Ceea ce prezintă, atât de limpede, regretatul *academician S. Marcus* în lucrarea citată, se poate extinde imediat la oricare trecere de la un nivel la altul de învățământ tradițional.¹²

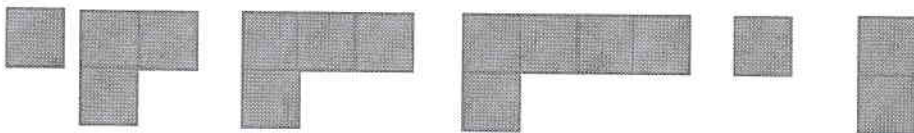
- b) Putem oferi/întreba copiii, ce alte fenomene se repetă? Printre răspunsuri amintim: ziua și noaptea, zilele săptămânii, alternanța anotimpurilor, orele unui ceas, aprinderea și stingerea unei lanterne, etc. Importanța acestor tipuri de probleme a fost evidențiată de mulți autori. Putem prezenta copiilor desene din natură, care reprezintă alternativ, cele patru anotimpuri, și ca activitate, să le așeze în ordinea naturală. Cântecelul interpretat conține ritmuri care se repetă și cu ajutorul gesturilor putem evidenția caracterul repetitiv.

Pe o suprafață pătrată putem desena bucăți de gresie care sunt reprezentate alternativ.

- c) Mai mult, amintim că cele mai râvnite posturi de economiști la nivel mondial sunt ocupate în general de absolvenți ai Universităților de prestigiu cu specializarea în domeniul *matematicii*.

Exercițiul 0.4

Considerăm o secvență formată din suprafețe pătrate descrisă mai jos:



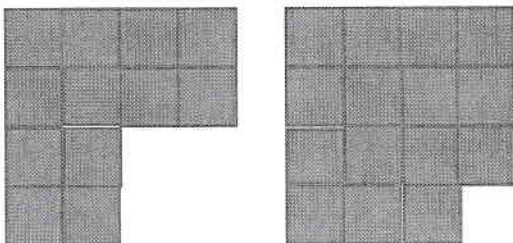
¹¹ Solomon Marcus, *Șocul matematicii*, (1987), Editura Albatros, București.

¹² Chiteș Costel, (coord.). *Matematică. Teme suplimentare pentru clasa a V-a*, (2012), Editura Corint (Semestrele 1 și 2).

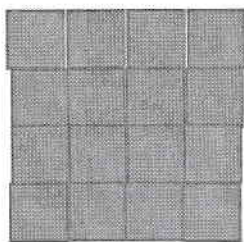
- a) Asamblați toate pătrățelele în ultima figură. Ce s-a format?
- b) Reașezați pătrățelele din figura formată sub forma inițială (ca în secvența dată).
- c) Câte pătrățele mici sunt în total? Numărați pe fiecare linie, apoi pe fiecare coloană.

Soluție

- a) Vom obține succesiv:



Și apoi se va completa cu pătrățelul rămas. Se obține un pătrat mai mare, de latură egală cu patru, ca în figura alăturată:



- b) Se vor obține 16 pătrățele, câte patru pe fiecare din cele patru linii (coloane). Reașezarea pătrățelelor mici care alcătuiesc pătratul mare în forma inițială are un dublu rol: i) modalitatea de a descompune o figură geometrică în alte figuri geometrice; ii) ordonarea în activitatea curentă, obicei care trebuie sădit la vârste fragede.

Remarcă

- a) Jocul de așezare a unor figuri geometrice este specific vârstei copiilor, ceea ce îl vor realiza cu plăcere. Elevii se implică personal în studiu, ceea ce conduce la un studiu mai adânc al materialului învățat. Se dezvoltă învățarea activă. În cazul reușitei, vor dori să utilizeze în continuare ceea ce a funcționat bine.
- b) Este puțin cunoscut că Bonaccio, tatăl celebrului matematician italian Leonardo Pisano (1170-1250, denumit Fibonacci), avea o mare abilitate de a transforma suprafețe pătratice în suprafețe dreptunghiulare și reciproc.¹³

¹³ Il Fibonacci, Breve viaggio fra curiosità matematiche; Aspetti insoliti o nascosti della matematica visti con gli occhi di Franco Conti; Unione Matematica Italiana, Bologna, 2011.

Bonaccio, ca reprezentant economic al Siciliei, a fost trimis în nordul Africii (în orașul Bugia, situat în Algeria de astăzi). În anul 1192, Fibonacci l-a însoțit pe tatăl său. Aici, el a avut revelația de a-i întâlni pe arabi, cei care utilizau scrierea zecimală a numerelor. După ce Fibonacci s-a instruit în utilizarea scrierii poziționale a numerelor, el și-a dorit, ca la întoarcere în Sicilia, să difuzeze acest mod nou, performant, de scriere și utilizare a numerelor, care să înlocuiască reprezentarea cu ajutorul cifrelor romane

($I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000$).

Prima lucrare a sa, publicată în anul 1202, intitulată Liber Abaci, va răspândi sistemul de numărare hindu-arab în Europa.

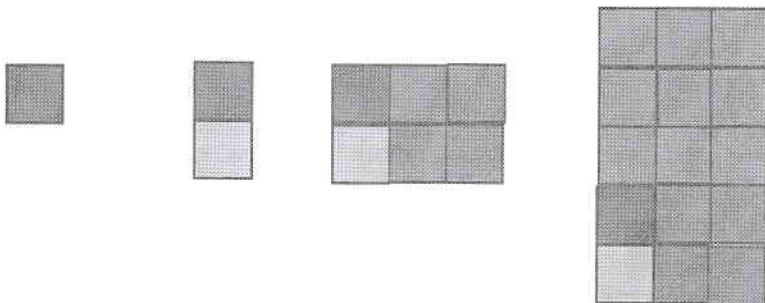
- c) La Euclid și Aristotel, numărul impar așezat sub forma unui colțar, era numit „gnomon”. Era folosit pentru a crea pătrate perfecte. În teoria lui Pitagora despre „numerele figurate”, gnomonul era o figură (sau un număr) care adăugat la altă figură (sau număr), nu schimba „forma” acestuia. Numerele figurate din aceeași serie sunt toate asemenea și diferențele succesive reprezintă gnomonii.

Exercițiul 0.5

Vom considera 20 de pătrățele identice pe care le vom așeza astfel:

Pas 1 - 1 pătrățel; Pas 2 - adăugăm încă 1 pătrățel sub primul; Pas 3 - adăugăm la dreapta 1 pătrat de latură 2; Pas 4- adăugăm deasupra un pătrat de latură 3.

- a) Să se scrie secvența formată din lungimile pătratelor construite succesiv.
b) Să se deseneze un nou pătrat situat la stânga ultimului dreptunghi ca are latura egală cu 5.



Soluție

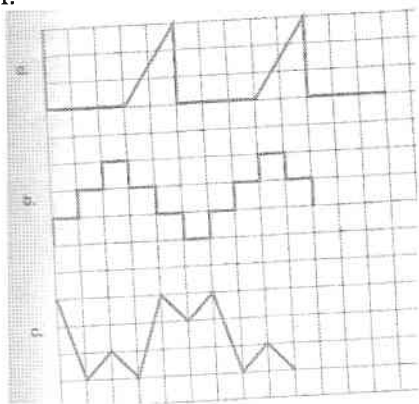
- a) 1,1,2,3

Remarcă

Am scris primii patru termeni ai șirului Fibonacci. Vă invităm să descoperiți situl **Fibonacci Quarterly** realizat de Societatea de Matematică din Canada.

Exercițiul 0.6

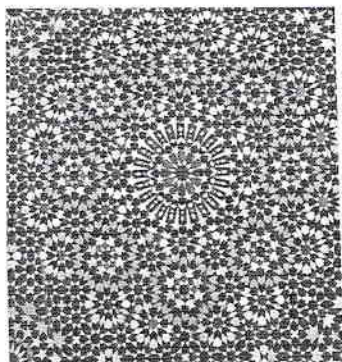
Păpușa ta are un pulover. Trebuie continuat tiparul în fiecare dintre cele trei cazuri.



Reprezentați diagramele pe o foaie de matematică. Numărați apoi câte segmente sunt îndreptate vertical, orizontal sau diagonal, pentru a putea să continuați desenele, știind că formele din acestea se repetă.

Remarcă

- a) Spațiile goale reprezintă o provocare pentru a alcătui tipare și desene, pentru a crea imagini, forme care să ne inspire, să ne instruiască și să ne lămurească. Toate culturile umane au manifestat dorința de a crea artă și muzică. Cele mai impresionante exemple care să dea acces la infinitate, se găsesc în lumea islamică. Mozaicul spațiilor plate și curbe a explorat toate simetriile matematice cunoscute astăzi. Repetitivitatea aceluiași desen sugerează infinitul în două moduri: o dată prin repetarea de un număr nesfârșit de ori a aceleiași forme și în al doilea mod, se realizează un algoritm prin care se ajunge la infint (adică la infinitul potențial cum îl numim astăzi).



- b) Pentru a pune gresie într-o baie, se pot utiliza plăci sub formă de: pătrat, triunghi echilateral, hexagon regulat.

Nu putem acoperi cu suprafețe regulate cu 5 laturi (pentagoane regulate).

- c) Interesant este că, în anul 1974, fizicianul englez Roger Penrose a descoperit că planul poate fi acoperit fără repetiții periodice simple, cu două tipuri de plăci: clinul și zmeul¹⁴ sau lucrarea¹⁵. Această descoperire s-a utilizat în teoria cvasi-cristalelor.

Exercițiul 0.7

Pe oricare din cele patru sensuri: înainte, înapoi, la stânga, la dreapta, o lăcustă sare liniar câte 6 sau 8 centimetri. Ne întrebăm dacă ea poate sări pentru a ajunge la:

- a) 7 centimetri; b) 4 centimetri.

Soluție

- a) Sărind în oricare sens, vom obține distanțe ce au valori naturale pare (cu soț), deci răspunsul este negativ.
- b) Da, poate ajunge la 4 centimetri. De exemplu, înainte sare de două ori câte 6 centimetri, apoi, în sens contrar (înapoi), sare 8 centimetri ($6+6-8=4$).

Remarcă

- a) La grădiniță copiii au exersat cele patru sensuri plane (pe tablă, pe caiete, orientare în teren).
- b) Pentru atractivitate se poate realiza un desen, în care, cele patru sensuri să fie indicate prin două axe perpendiculare care au originea comună. Se pot realiza două tije care se asamblează în punctul din care va sări lăcusta. Se induce astfel sistemul de coordonate cartezian, sistem care a generat studierea geometriei cu ajutorul algebrei. Cartesius, era denumirea latină a matematicianului și filosofului francez René Descartes (1596-1650).¹⁶

Exercițiul 0.8

Pe oricare din cele patru sensuri: înainte, înapoi, la stânga, la dreapta, o lăcustă sare liniar câte 8 sau 12 centimetri. Ne întrebăm dacă ea poate sări pentru a ajunge la:

- a) 5 centimetri; b) 18 centimetri; c) 4 centimetri.

¹⁴ John D. Barrow, *Cartea infinitului*, 2012, Editura Humanitas. Pag.23-28.

¹⁵ *Il Fibonacci breve viaggio fra curiosità matematiche, Aspetti insoliti o nascosti della matematica visti con gli occhi di Franco Conti*, 2011, Tipografia Monograf S.r.l., Unione Matematica Italiana; p.3.

¹⁶ René Descartes, *Corespondența completă*, Vol I, (2014), Vol.II, (2015), Editura Polirom, Ediție îngrijită de Vlad Alexandrescu.